

Aufgaben zu quadr. Funktionen

① a) $f_1(x) = x^2 - 4x + 6$

Nullstellen:

$$x^2 - 4x + 6 = 0$$

$$D = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 < 0$$

\Rightarrow keine Nullstellen

$y = 2$:

$$x^2 - 4x + 6 = 2 \quad | -2$$

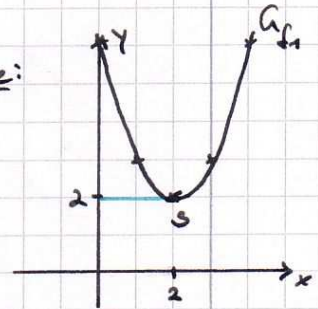
$$x^2 - 4x + 4 = 0$$

$$(x-2)^2 = 0$$

$x = 2$ ist einzige Stelle mit $y = 2$

\Rightarrow Scheitel! $S_1(2|2)$

Skizze:



b) $f_2(x) = 0,5x^2 + x + 1,5$

Nullstellen:

$$0,5x^2 + x + 1,5 = 0$$

$$D = 1 - 4 \cdot 0,5 \cdot 1,5 < 0$$

\Rightarrow keine Nullstellen

$y = 2$:

$$0,5x^2 + x + 1,5 = 2 \quad | -2$$

$$0,5x^2 + x - 0,5 = 0$$

$$D = 1 - 4 \cdot 0,5 \cdot 0,5 = 0$$

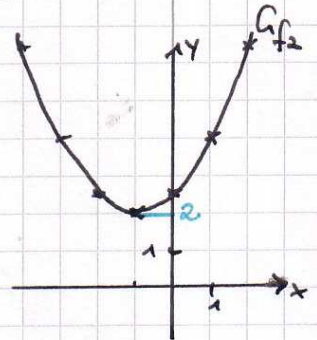
$$x = \frac{-1 \pm 0}{2 \cdot 0,5} = -1$$

$x = -1$ ist einzige Stelle mit $y = 2$

\Rightarrow Scheitel!

$S_2(-1|2)$

Skizze:



c) $f_3(x) = -x^2 + 5x - 4$

Nullstellen:

$$-x^2 + 5x - 4 = 0$$

$$D = 25 - 4 \cdot (-1) \cdot (-4) = 9$$

$$x_{1/2} = \frac{-5 \pm 3}{-2}$$

$$x_1 = 4; x_2 = 1$$

\downarrow

Scheitel: in der Mitte zwischen den beiden Nullstellen: $x_s = 2,5$

$$f_3(2,5) = 2,25$$

$\Rightarrow S_3(2,5|2,25)$

$y = 2$:

$$-x^2 + 5x - 4 = 2 \quad | +x^2 - 5x + 4$$

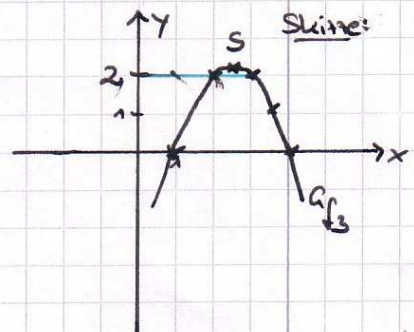
$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$D = 25 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 1$$

$$x_{1/2} = \frac{5 \pm 1}{2}$$

$$x_1 = 2; x_2 = 3$$

Skizze:



$$\textcircled{2} \quad y = -\frac{2}{3}(x - x_s)^2 + 4\frac{1}{6}$$

P(0|0) liegt auf der Parabel: !

$$0 = -\frac{2}{3}(0 - x_s)^2 + 4\frac{1}{6} \quad | + \frac{2}{3} x_s^2$$

$$\frac{2}{3} x_s^2 = \frac{25}{6} \quad | \cdot \frac{3}{2}$$

$$x_s^2 = \frac{25}{4} \quad | \sqrt{\quad}$$

$$x_s = \pm \frac{5}{2}$$

$$\textcircled{3} \quad y = -0,25x^2 + 0,5x - k$$

S(x_s|1):

$$1 = -0,25x^2 + 0,5x - k \quad | -1$$

$$0 = -0,25x^2 + 0,5x - k - 1 \cdot (-4)$$

$$0 = x^2 - 2x + 4k + 4$$

$$\Delta = 4 - 4 \cdot 1 \cdot (4k + 4) = -16k - 12$$

$$\Delta = 0! \Rightarrow k = -\frac{3}{4}$$

oder:

Scheitelform

$$y = -0,25x^2 + 0,5x - k$$

$$= -0,25 \cdot [(x^2 - 2x + 1) - 1^2 + 4k]$$

$$= -0,25 \cdot (x-1)^2 + \underbrace{0,25 - k}_{y_s = 1}$$

$$1 = 0,25 - k$$

$$k = -0,75$$

$$\textcircled{4} \quad f: x \mapsto -0,25x^2 - 2x + 3$$

a) Wertemenge: $W =]-\infty; y_s]$
nach unten geöffnet

Scheitel:

$$y = -0,25x^2 - 2x + 3$$

$$= -0,25[(x^2 + 8x + 4^2) - 4^2 - 12]$$

$$= -0,25(x+4)^2 + 7$$

$$S(-4|7) \Rightarrow W =]-\infty; 7]$$

b) $\hat{=}$ gibt es Nullstellen?

$$(I) \Delta = 4 - 4 \cdot (-0,25) \cdot 3 = 7 > 0$$

\Rightarrow 2 Nullstellen

oder:

(II) • Scheitel oberhalb der x-Achse

• Parabel nach unten geöffnet

\Rightarrow 2 Nullstellen

$$c) \underline{f(x) = -0,25x^2 + 1}$$

$$\textcircled{5} \quad f: x \mapsto 8x - x^2 - 12$$

1) SP mit y-Achse: $f(0) = -12$
S_y(0|-12)

2) SP mit x-Achse: Nullstellen best.

$$0 = -x^2 + 8x - 12$$

$$\Delta = 8^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-12) = 16$$

$$x_{1,2} = \frac{-8 \pm 4}{-2}; \quad x_1 = 6, \underline{S_{x_1}(6|0)}$$

$$x_2 = 2, \underline{S_{x_2}(2|0)}$$

3) Wertemenge: Scheitel, Öffnung

• Scheitel: x_s = 4 (Nullstelle!)

$$y_s = 8 \cdot 4 - 4^2 - 12 = \underline{4}$$

• -x² : a = -1 < 0 \Rightarrow nach unten geöffnet

$$\Rightarrow \underline{W =]-\infty; 4]}$$

⑥ $f_1(x) = a(x-5)^2$ (a beliebig)

Scheitelform $\hat{=}$ Nullstellenform

$f_{2,3}(x) = a(x - (1+\sqrt{5}))(x - (1-\sqrt{5}))$

Nullstellenform

$= a(x^2 - 2x + 1 - 5)$

$= a(x^2 - 2x - 4)$

$= a x^2 - 2ax - 4a$

Normalform

⑦ $f(x) = ax^2 + bx + c$

• $s_y(0|9) \Rightarrow c = 9$; $f(x) = ax^2 + bx + 9$ Normalform

• $S(-2|-3)$

$f(x) = a(x+2)^2 - 3$ Scheitelform

Vergleich: SF - NF

$y = a(x+2)^2 - 3$ (SF ausmultiplizieren)

$= a x^2 + \underbrace{4ax}_{=b} + \underbrace{4a - 3}_{=9}$

$4a - 3 = 9$

$4a = 12$

$a = 3$

$\Rightarrow b = 4a = 12$

$\Rightarrow f(x) = 3x^2 + 12x + 9$

⑧ a) $f(x) = x^2 + tx + 1$

$y > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$

Da nach oben offen: $y_s > 0$

Scheitelform:

$y = x^2 + tx + \left(\frac{t}{2}\right)^2 - \left(\frac{t}{2}\right)^2 + 1$

$= \left(x + \frac{t}{2}\right)^2 + \underbrace{1 - \frac{t^2}{4}}_{>0}$

$1 - \frac{t^2}{4} > 0 \quad | + \frac{t^2}{4}$

$1 > \frac{t^2}{4} \quad | \cdot 4$

$4 > t^2$

$-2 < t < 2$

o. $t \in]-2; 2[$

b) $f(x) = -x^2 - tx - 2$

Scheitel auf x-Achse:
genau 1 Nullstelle

$\Delta = (-t)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-2)$
 $= t^2 - 8 = 0$

$t^2 = 8$; $t_{1,2} = \pm \sqrt{8}$

c) $f(x) = -x^2 - tx - 2$

Scheitel auf y-Achse:

$b = 0$

$\Rightarrow t = 0$

d) $f(x) = tx + 1$ lineare Funktion!

$t \neq 0$

③ a) $f_1(x) = 3 \cdot (x-2)(x-5) = 3(x^2 - 7x + 10) = \underline{3x^2 - 21x + 30}$
 $f_3(x) = 3\left(x^2 - 7x + \frac{49}{4}\right) - 6\frac{3}{4} = 3x^2 - 21x + 36\frac{3}{4} - 6\frac{3}{4} = \underline{3x^2 - 21x + 30}$

b) $f_1(x)$: Nullstellenform

Vorteil: Öffnung, NS direkt ablesbar
 Nachteil: Scheitel nicht erkennbar

$f_2(x)$: Normalform

Vorteil: Öffnung, S_y direkt ablesbar
 Nachteil: Nullstellen, Scheitel nicht erkennbar

$f_3(x)$: Scheitelform

Vorteil: Öffnung, Scheitel direkt ablesbar
 Nachteil: NS, S_y nicht erkennbar

c) 3: Weite 3, nach oben geöffnet

2,5: Nullstellen

30: y-Achsenabschnitt

3,5: x-Koordinate des Scheitels

-6,75: y-Koordinate des Scheitels

(10) $f(x) = ax^2 + bx + c$

- (0|0) liegt auf Parabel $\Rightarrow c = 0$

$$f(x) = ax^2 + bx$$

- Scheitel liegt auf Winkelhalbierenden $\Rightarrow x_s = y_s$

Scheitelform: $f(x) = a(x - x_s)^2 + y_s$

Scheitel: x_s durch Nullstellen

$$0 = ax^2 + bx$$

$$0 = ax(x + \frac{b}{a})$$

$$x_1 = 0; x_2 = -\frac{b}{a} \quad (b \neq 0)$$

x_s liegt genau in der Mitte: $x_s = -\frac{b}{2a} = y_s$

- P(4,5 | 2,25) liegt auf dem Graphen

$$\frac{9}{4} = a \cdot \left(\frac{9}{2}\right)^2 + b \cdot \frac{9}{2}$$

$$\frac{9}{4} = \frac{81}{4}a + \frac{9}{2}b \quad | \cdot 4$$

$$9 = 81a + 18b \quad | :9$$

$$1 = 9a + 2b \quad (I)$$

1. Gleichung für LGS

- Vergleich: $S\bar{T} - N\bar{T}$

$$f(x) = a\left(x - \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a}$$

$$= a\left(x^2 - \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) - \frac{b^2}{4a}$$

$$= ax^2 - bx + \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{4a}$$

$$= 0, \text{ da } c = 0$$

$$\frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{4a} = 0 \quad | \cdot 4a$$

$$b^2 - 2b = 0$$

$$\Rightarrow b_1 = 0 \text{ (geht nicht); } \underline{b_2 = 2} \text{ mit (I): } \underline{a = -\frac{1}{3}}$$

$$\Rightarrow \underline{f(x) = -\frac{1}{3}x^2 + 2x}$$

Wertetabelle:

x	-1	0	1	2	3	4
f(x)	$-2\frac{1}{3}$	0	$1\frac{2}{3}$	$2\frac{2}{3}$	3	$2\frac{2}{3}$

